Exercices de combinatoire

1. On filme en vidéo une pièce contenant 4 chaises. Deux personnes entrent successivement et y prennent place. Combien de scénarii différents peut-on envisager ? (Les représenter par un arbre).

2. Combien existe-t-il de nombres de 4 chiffres significatifs (pas de 0 en 1è place)exactement ?

3. (a) Cinq personnes désirent s'asseoir dans un compartiment de 8 places. Quel est le nombre de possibilités ?

   (b) Même question, mais avec 8 personnes.

4. Dans l'alphabet Braille, chaque lettre ou signe est représenté par 6 points, certains étant en relief. Combien de signes distincts peut-on ainsi composer ?

5. (a) Avec les 26 lettres de l'alphabet, combien peut-on former de "mots" de 5 lettres ?

   (b) Même question, en se limitant aux mots composés de 5 lettres différentes.

6. Combien de nombres de 3 chiffres distincts peut-on former avec les chiffres 2,3,5,6,7,9 ? Parmi ceux-ci, combien sont-ils inférieurs à 400 ? pairs ? multiples de 5 ?

7. Un menu de restaurant propose 10 hors-d'uvre, 4 entrées, 11 plats de viande et 9 desserts. Combien peut-on composer de menus contenant chacun de ces 4 types de plats ?

8. De combien de façons peut-on aligner 5 dés de couleurs différentes ? (prendre aussi en compte le fait que chaque dé indique un nombre de points).

9. (a) Un immeuble est composé d'un rez-de-chaussée et de 8 étages. Un ascenseur part du rez-de-chaussée avec 5 occupants. De combien de manières différentes ces 5 occupants peuvent-ils choisir les étages auxquels ils vont se rendre ?

   (b) Même question dans le cas où, à chaque étage, un occupant au plus quitte l'ascenseur.

10. (a) Neuf personnes forment un cercle. De combien de manières peuvent-elles se disposer (on suppose que seule la place relative de ces personnes importe) ?

    (b) Même question, si l'on suppose de plus que deux personnes choisies d'avance doivent être placées côte à côte.

11. De combien de façons différentes peut-on aligner 5 boules rouges, 2 blanches et 3 bleues ?

12. Combien de mots peut-on écrire en utilisant une fois et une seule chaque lettre du mot MISSISSIPPI? Parmi ces mots, combien commencent et se terminent par S ?

13. Combien de mots peut-on écrire en utilisant une fois et une seule chaque lettre du mot TOULOUSE, si les consonnes doivent occuper les première, quatrième et septième places ?

14. Combien de mots de 4 lettres (avec ou sans signification) peut-on écrire avec les lettres du mot BATAVIA ?

15. De combien de manières peut-on asseoir 8 personnes en rang si:
(a) aucune restriction n'est mise;
(b) les personnes A et B veulent être ensemble;
(c) les hommes ne doivent avoir que des voisines et inversement, en supposant qu'il y a 4 hommes et 4 femmes;
(d) les hommes, qui sont 5, doivent rester ensemble;
(e) les personnes forment 4 couples de gens mariés et si chaque couple doit rester réuni.

16. Douze joueurs d'échecs participent à un tournoi dans lequel chaque joueur joue une fois contre chacun des autres joueurs. Combien y a-t-il de parties disputées ?

17. (a) Dans une société de 25 personnes, on doit en désigner 4 qui formeront le comité. Combien de comités différents peut-on constituer ?

(b) Dans une société de 25 personnes, on doit désigner un président, un vice-président, un trésorier et un secrétaire. De combien de manières différentes peut-on choisir ces 4 personnes ?

18. Avec 10 députés et 6 sénateurs, on veut composer une commission de 7 membres comprenant exactement 5 députés. Quel est le nombre de possibilités ?

19. On distribue les 36 cartes d'un jeu à 4 joueurs. Quel est le nombre de distributions différentes ?

20. (a) Un étudiant doit résoudre 8 problèmes sur 10 lors d'une épreuve écrite. Combien de choix peut-il faire ?

(b) Même question en supposant de plus qu'il doive obligatoirement résoudre les 3 premiers problèmes;

(c) Même question que (a) en supposant de plus qu'il doive obligatoirement résoudre 4 au moins des 5 premiers problèmes.

21. Un questionnaire comprend 8 questions auxquelles il faut répondre par oui ou par non. Combien peut-on donner de réponses différentes avec 4 oui et 4 non ?

22. De combien de façons peut-on choisir 5 cartes à jouer dans un jeu de 36 cartes, de manière que ces 5 cartes comprennent :

(a) les 4 as ?

(b) 2 as et 2 rois exactement ?

(c) au moins un as ?

23. Dans le jeu du Sport-Toto, on pronostique le résultat de 13 matches (1 = victoire de l'équipe visitée, x = match nul, 2 = victoire de l'équipe visiteuse).

Combien de pronostics différents peut-on écrire ?

Parmi tous ces pronostics, combien permettent de réaliser 13 points ? 12 points ? 4 points ? 0 point ?

24. Lorsqu'on jette 20 fois une pièce de monnaie, combien de séquences différentes sont-elles possibles ?

Parmi celles-ci, combien contiennent-elles exactement 1 fois pile? 4 fois pile ? 10 fois pile ? 20 fois pile ?

25. De combien de façons peut-on remplir une feuille de loterie à numéros (choisir 6 n^{os} sur 45) ? Combien, parmi toutes ces possibilités, permettent-elles de réaliser 6 points, 0 point, 3 points ?

26. (a) Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12 . On en tire simultanément 3 . Déterminer le nombre de tirages différents.

(b) Même question si l'on tire successivement 3 boules, sans remettre dans l'urne celles qui ont été tirées et qu'on tient compte de l'ordre dans lequel les boules sortent.

(c) Même question que sous (b) si, après chaque tirage, on remet la boule dans l'urne.

27. On lance 7 dés identiques. Quel est le nombre d'issues de cette expérience ?

28. (a) Trois cambrioleurs doivent se répartir 14 lingots d'or de 1kg. De combien de manières peuvent-ils procéder?

(b) Même question si l'on suppose que chacun d'entre eux doit avoir au moins deux lingots.

(c) Même question que (a) si l'on suppose qu'ils pourraient décider d'un commun accord de faire don d'une partie des lingots restants aux oeuvres de la police.

29. Une personne a 20 000 dollars à placer sur 4 affaires potentielles. Chaque investissement doit être un nombre entier de milliers de dollars, et il existe un engagement minimum pour chaque affaire que l'on retiendra. Ces minimums sont respectivement 2, 2, 3 et 4 milliers de dollars. Combien de stratégies d'investissement y a-t-il si :

(a) un investissement doit être fait sur chaque affaire ?

(b) au moins 3 des 4 affaires doivent être couvertes ?

30. Lors d'une vente aux enchères, une collection de 4 Dali, 5 Van Gogh et 6 Picasso fait face à 5 collectionneurs. Toutes les uvres partent. La journaliste en charge de couvrir l'événement n'a à noter que le nombre des Dali, Van Gogh et Picasso acquis par chaque collectionneur. Combien de résultats sont-ils possibles dans ces conditions ?

31. Dans une assemblée de 25 dames et 15 messieurs, il est décidé de nommer un comité de 5 personnes.(a) Combien de comités peut-on envisager ?

(b) Combien de ces comités comprennent-ils exactement 3 dames ?

(c) Combien de ces comités comprennent-ils au moins 3 dames ?

32. (a) Quel est le nombre de possibilités de former deux équipes de beach-volley de 2 joueurs avec 7 personnes ?

(b) Quel est le nombre de possibilités de former une paire de joueurs de tennis, ainsi qu'une autre paire de joueurs de badminton, avec 7 personnes ?

Solutions :

1) 12

2) 9000

3) (a) 6'720 (b) 40'320

4) 64

5) (a) 11'881'376 (b) 7'893'600

6) 120, 40, 40, 20

7) 3960

8) 933'120

9) (a) 32'768 (b) 6'720

10) (a) 40'320 (b) 10'080

11) 2520

12) 34'650, 3'780

13) 180

14) 208

15) (a) 40'320 (b) 10'080 (c) 1'152 (d) 2'880 (e) 38

16) 66

17) (a) 12'650 (b) 303'600

18) 3'780

19) ~ 2.145 .10 puissance19

20) (a) 45 (b) 21 (c) 35

21) 70

22) (a) 32 (b) 1'008 (c) 175'616

23) 1'594'323 puis 1, 26, 366'080, 8'192

24) 1'048'576 puis 20, 4'845, 184'756, 1

25) 8'145'060 puis 1, 3'262'623, 182'780

26) (a) 220 (b) 1'320 (c) 1'728

27) 792

28) (a) 120 (b) 45 (c) 680

29) (a) 220 (b) 572

30) 1'852'200

31) (a) 658'008 (b) 241'500 (c) 484'380

32) (a) 105 (b) 210

Exercices combinatoire (2)

1. Un gymnase a reçu 3 billets de concert pour les élèves d'une classe. Sachant que cette classe est composée de 19 étudiants, calculer le nombre de façons de distribuer ces trois billets dans chacun des cas suivants:

(a) les billets sont numérotés et chaque élève ne peut recevoir qu'un seul billet;

(b) les billets sont numérotés et chaque élève peut recevoir plusieurs billets;

(c) les billets ne sont pas numérotés et chaque élève ne peut recevoir qu'un seul billet;

(d) les billets ne sont pas numérotés et chaque élève peut recevoir plusieurs billets.

2. (a) Combien de séquences différentes peut-on lire sur un compteur kilométrique de voiture ?
(ce compteur est composé de 5 cylindres sur chacun desquels sont gravés les chiffres de 0 à 9).

(b) Parmi les configurations ci-dessus, quel est le nombre de celles où figure exactement trois fois le chiffre 7 ?

(c) Même question, mais où figure au moins trois fois le chiffre 7 .

(d) Même question, mais où figure au moins une fois le chiffre 7 .

3. (a) Sur un damier rectangulaire de 4 colonnes et 3 lignes, de combien de manières peut-on placer 4 jetons de couleurs différentes ?

(b) Même question s'il doit y avoir un seul jeton dans la première colonne et qu'il soit jaune.

(c) Même question que (a) s'il doit y avoir exactement deux jetons dans la troisième colonne.

(d) Même question que (a) s'il doit y avoir au moins deux jetons dans la quatrième colonne.

4. (a) Sur un damier rectangulaire de 7 colonnes et 5 lignes, de combien de manières peut-on disposer 7 jetons, à savoir 4 bleus et 3 jaunes ?

(b) Même question si les jetons bleus occupent les cases numérotées 1, 2, 3, 4 de la première ligne.

(c) Même question que (a) s'il doit y avoir exactement 1 jeton bleu et 2 jetons jaunes dans la première colonne.

5. Sur un damier rectangulaire de 10 colonnes et 30 lignes, quel est le nombre de dispositions possibles pour 6 jetons de même couleur s'il y a :

(a) au plus un jeton par colonne?

(b) au plus un jeton par ligne?

(c) au plus un jeton par ligne et par colonne?

6. On dispose de 7 jetons. Deux portent le chiffre 1 , trois portent le chiffre 2 , deux portent le chiffre 3 .

(a) Combien de nombres différents peut-on composer en juxtaposant ces 7 jetons ?

(b) Combien de ces nombres sont-ils inférieurs à 1'300'000 ?

7. Une personne peut choisir 4 activités dans une liste de 24 activités, qui comporte 5 activités de type A, 9 activités de type B et 10 activités de type C.

(a) Combien de choix différents cette personne peut-elle faire ?

(b) La personne doit choisir trois activités d'un type, et la quatrième d'un autre type. Combien de choix différents a-t-elle ?

(c) La personne ne peut pas choisir plus de deux activités de même type. Combien de choix différents a-t-elle ?

8. On dispose de 10 timbres tous différents. Trois d'entre eux sont rouges, cinq sont bleus et deux sont verts.

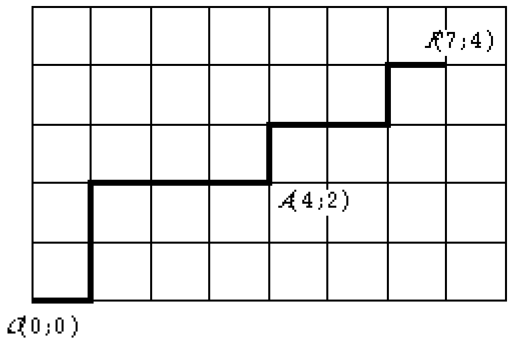
On en choisit quatre. De combien de façons différentes peut-on faire ce choix, sachant que:

(a) les timbres choisis sont tous de la même couleur ?

(b) une et une seule des couleurs ne figure pas dans les timbres choisis ?

(c) les trois couleurs figurent parmi les timbres choisis ?

9. Dans le réseau **NXN**, on veut joindre l'origine au point P(7; 4) par un chemin aussi court que possible, en suivant les lignes du réseau.



(a) Combien de tels chemins y a-t-il ?

(b) Combien y a-t-il qui passent par A(4 ; 2) ?

(c) Généraliser (a) aux cas où P a pour coordonnées (a ; b).

10. Huit personnes font la file pour acheter une glace à 1.- . Trois parmi elles ont une pièce de 2.- et les cinq autres ont une pièce de 1.- . Le marchand n'a pas de monnaie. Combien y a-t-il d'ordres de succession pour lesquels le marchand réussit à les servir et à rendre la monnaie dans l'ordre où elles sont ?

11. 30 personnes disciplinées font la file pour entrer dans un cinéma. Combien y a-t-il de façons de les laisser entrer en 5 fois?

12. Jeu de Mastermind

Dénombrer le nombre de possibilités qu'il y a de remplir 5 trous avec 8 couleurs différentes. Les couleurs peuvent être répétées et certains trous laissés vides.

13. Dans une salle d'attente, 20 chaises sont alignées. 7 personnes arrivent et s'asseyent de telle sorte qu'ils n'aient aucun voisin direct. Combien peut-on envisager de dispositions différentes ?

14. Soit E = {1;2;3;4;5;6;7;8;9} .

On considère tous les nombres de 9 chiffres obtenus en rangeant dans un certain ordre les éléments de E.

Quelle est la somme de ces nombres ?

15. Dix délégués de 10 pays dont la Chine, la France, la Grande-Bretagne et les Etats-Unis s'assoient sur un rang. De combien de manières est-ce possible si le Français et l'Anglais tiennent à être voisins tandis que l'Américain et le Chinois ne veulent pas l'être ?

Solutions :

1 (a) 5814 (b) 6'859 (c) 969 (d) 1'330	**2** (a) 105 (b) 810 (c) 856 (d) 40'951
3 (a) 11'880 (b) 1'512 (c) 2'592 (d) 2'808	**4** (a) 235'358'200 (b) 4'495 (c) 3'288'600
5 (a) ~ 1.53 .10puissance11 (b) ~ 5.94 .10puissance11 (c) ~ 8.98 .10puissance10	**6** (a) 210 (b) 40
7 (a) 10'626 (b) 3'130 (c) 7'155	**8** (a) 5 (b) 100 (c) 105
9 (a) 330 (b) 150	**10** 20'160
11 23'751	**12** 59'049
13 17'297'280	**14** ~ 2.016 . 10 puissance14
15 564'480	

Exercices supplémentaires

1. Combien de nombres peut-on former avec les chiffres 0,1,2,3,4,5,6,7, chaque chiffre n'étant présent q'une fois, de façon que chaque nombre commence par un 7 et soit divisible par 5,
   - si les nombres sont de 8 chiffres ?
   - si les nombres sont de 6 chiffres ?

   Réponses : 1440 ; 720

2. Cinq hommes et quatre femmes vont au cinéma. Ils disposent d'une rangée de neuf places. De combien de façons différentes peuvent-ils s'asseoir si l'on veut que chaque femme soit entourée de deux hommes ? *Réponse : 2880*
3. On dispose de n boules. On veut former k groupes contenant respectivement $r_1, r_2,..., r_k$ boules, en utilisant toutes les boules ($r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$). De combien de façons peut-on le réaliser ?

   Réponses : $\dfrac{n!}{r_1!r_2!...r_n!}$
4. On dispose de 5 billes rouges, 2 blanches et 3 bleues. Si les billes de même couleur sont indiscernables, de combien de façons peut-on les aligner ? *Réponses : 2520*
5. Un groupe de 5 mathématiciens et 7 physiciens doit élire un comité représentatif formé de 2 mathématiciens et 2 physiciens. Quel est le nombre de résultats possibles si :
   - les 12 personnes sont éligibles ?
   - un physicien est élu d'office ?
   - 2 mathématiciens ne sont pas éligibles ? *Réponses : 210 ; 60 ; 63*
6. Le jeu de l'écarté se joue avec 32 cartes, chaque joueur en recevant 5.
   - combien de mains différentes peut avoir un joueur ?
   - combien y-a-t-il de mains contenant 2 atouts et 2 seulement ?

   Réponses : 201376 ; 56672

7. Quel est le nombre de groupes de six personnes que l'on peut former avec 4 garçons et 6 filles si l'on veut qu'ils contiennent obligatoirement 2 garçons,
   - donnés ?
   - seulement ?
   - au moins ? *Réponses : 70 ; 90 ; 185*

8. En choisissant judicieusement les termes du binôme de Newton,

   démontrer que : $\sum_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n$ Rem.: 2 = 1 + 1

9. De même, démontrer que :

   si n est pair : $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^n = 2^{n-1}$ et si n est impair : $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + C_n^n = 2^{n-1}$

10. Calculer l'expression: $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + ...$ et vérifier le résultat obtenu pour n=9.
    Suggestion : Calculer $(1+i)^n$ de deux manières différentes (formes alg et trigono des nb complexes)

11. Vérifier que : $C_n^0 \cos 0x + C_n^1 \cos x + C_n^2 \cos 2x + ... + C_n^n \cos nx = 2^n . \cos^n \dfrac{x}{2} . \cos \dfrac{nx}{2}$